

# Zbiór zadań z fizyki

dr inż. Maciej Mulak, prof. PWr

Z poniższego zestawu na zajęcia wybierać warto zadania najciekawsze i najbardziej reprezentatywne. Pozostałe potraktujcie jako propozycje do samodzielnego treningu – mogą się przydać w przygotowaniu do sprawdzianów.

## I. Wektory

### *Pojęcia podstawowe*

1. Podaj kilka przykładów wielkości skalarnych, wektorowych oraz przykład tensora (drugiego rzędu). Jaka jest zasadnicza różnica pomiędzy wektorami a skalarami w danym układzie współrzędnych?
2. Podaj kilka przykładów zastosowania iloczynu wektorowego i skalarnego wektorów w fizyce.

### *Iloczyn skalarny*

3. Pokaż, że iloczyn skalarny wektorów wyraża się wzorem  $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ .
4. Dany jest wektor  $\vec{a} = 7\hat{i} + 11\hat{j}$ . Znajdź wektor jednostkowy prostopadły do wektora  $\vec{a}$ .
5. Dane są dwa wektory:  $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$  oraz  $\vec{b} = 6\hat{i} + 16\hat{j}$ . Rozłóż wektor  $\vec{b}$  na składową równoległą do wektora  $\vec{a}$  oraz składową do niego prostopadłą.
6. **Kąt z chemii.** Oblicz kąt między dwiema przekątnymi sześcianu (wybierz sześcian o boku 1 z wierzchołkiem w początku układu i użyj iloczynu skalarnego). Skąd bierze się kąt  $109,5^\circ$  między wiązaniami w cząsteczce metanu  $\text{CH}_4$ ?
7. **Panel słoneczny.** Moc panelu jest proporcjonalna do iloczynu skalarnego  $\hat{n} \cdot \hat{s}$ , gdzie  $\hat{n}$  jest wektorem jednostkowym normalnym do panelu, a  $\hat{s}$  wektorem jednostkowym wskazującym Słońce. Panel na dachu nachylony jest pod kątem  $35^\circ$  do poziomu i skierowany na południe. Oblicz, jaki ułamek maksymalnej mocy daje panel, gdy Słońce jest  $50^\circ$  nad horyzontem dokładnie na południu, oraz gdy jest  $20^\circ$  nad horyzontem na południowym zachodzie. Kiedy  $\hat{n} \cdot \hat{s} < 0$  i co to fizycznie oznacza?

### *Iloczyn wektorowy*

8. Przeanalizuj definicję iloczynu wektorowego  $\vec{A} \times \vec{B}$ .
9. Pokazać, że  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ , stosując wzór na iloczyn wektorowy w układzie kartezjańskim.
10. Sprawdzić, że pole równoległoboku, którego boki tworzą wektory  $\vec{a}$  oraz  $\vec{b}$ , wynosi  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ .
11. **Odkręcanie koła.** Moment siły  $\vec{F}$  względem punktu O definiujemy jako  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ , gdzie  $\vec{r}$  jest wektorem poprowadzonym od punktu O do punktu przyłożenia siły; jego wartość wynosi  $M = rF \sin \varphi$  ( $\varphi$  – kąt między  $\vec{r}$  a  $\vec{F}$ ), a kierunek jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez  $\vec{r}$  i  $\vec{F}$ . Klucz do kół ma długość 0,3 m. Działasz na jego koniec siłą 200 N. Oblicz moment siły względem śruby, gdy siła jest (a) prostopadła do klucza, (b) skierowana pod kątem  $60^\circ$  do klucza, (c) wzdłuż klucza. Zapisz wynik jako iloczyn wektorowy  $\vec{r} \times \vec{F}$  i wyjaśnij, dlaczego mechanicy dokładają rurkę na klucz.
12. Jak szybko sprawdzić, czy istnieje taki wektor  $\vec{A}$ , dla którego  $(2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) \times \vec{A} = (4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$ ?

*Oba iloczyny*

- 13.** Dane są dwa wektory:  $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$  oraz  $\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ . Znajdź: iloczyn skalarny  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ , iloczyn wektorowy  $\vec{A} \times \vec{B}$ , kąt pomiędzy wektorami  $(\vec{A} - \vec{B})$  oraz  $(\vec{A} + \vec{B})$ .
- 14.** Jeśli  $|\vec{A} \times \vec{B}| = \vec{A} \cdot \vec{B}$ , to jaki kąt tworzą wektory  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ ?

## II. Elementarne pochodne i całki

1. Obliczyć pochodne po zmiennej  $x$  następujących funkcji:  $3x$ ,  $e^{x+3}$ ,  $\cos^4(x)$ ,  $x^3 \sin(x)$ ,  $\operatorname{tg}(x) = \sin(x)/\cos(x)$ ,  $\ln(x^2)$ ,  $f^2(x)$ ,  $\sqrt{\sin(x)}$ .

Wyznacz pierwsze i drugie pochodne po czasie następujących funkcji:

- a)  $y = Bt + Ct^2$
- b)  $x = Ae^{-\gamma t}$
- c)  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$
- d)  $x = A \cos(\omega t)$

*Przykłady rozwiązań:*

$$\begin{aligned}(x^3 \sin x)' &= 3x^2 \sin x + x^3 \cos x && \text{(reguła iloczynu)} \\ (\cos^4 x)' &= 4 \cos^3 x \cdot (-\sin x) = -4 \cos^3 x \sin x && \text{(reguła łańcuchowa)} \\ (\ln x^2)' &= \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x} && \text{(to samo daje zapis } \ln x^2 = 2 \ln x)\end{aligned}$$

2. Wyznacz całki nieoznaczone:

- a)  $F(t) = \int dt$
- b)  $F(t) = \int t dt$
- c)  $F(t) = \int (At + B) dt$
- d)  $F(t) = \int \frac{dt}{a + bt}$
- e)  $F(t) = \int \exp(-\gamma t) dt$
- f)  $F(t) = \int \cos(\omega t) dt$

*Przykłady rozwiązań:*

$$\begin{aligned}\text{b)} \quad & \int t dt = \frac{t^2}{2} + C \\ \text{d)} \quad & \int \frac{dt}{a + bt} = \frac{1}{b} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{b} \ln |a + bt| + C \quad (u = a + bt, \quad du = b dt) \\ \text{e)} \quad & \int e^{-\gamma t} dt = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma t} + C \quad \text{(sprawdzenie: pochodna prawej strony daje } e^{-\gamma t})\end{aligned}$$

### III. Oszacowania rzędu wielkości

*Należy je przeprowadzać bardzo zgrubnie, przyjmując odważnie dane początkowe! Liczy się rząd wielkości, nie druga cyfra znacząca. Liczenie*

1. Ile ziarenek surowego ryżu mieści się w litrowym garnku?
2. Oszacuj, ile kropli wody znajduje się w oceanach na Ziemi.
3. **Ostatni oddech Cezara.** Załóż, że cząsteczki z ostatniego wydechu Juliusza Cezara (ok. 0,5 l powietrza) wymieszały się równomiernie z całą atmosferą Ziemi (masa atmosfery ok.  $5 \cdot 10^{18}$  kg, średnia masa molowa 29 g/mol). Oszacuj, ile cząsteczek z tego wydechu wdychasz w każdym swoim oddechu. Wynik zaskakuje?
4. Oszacuj liczbę stroicieli pianin w dużym mieście (zadanie oryginalnie sformułowane przez Enrico Fermiego (1901–1954), wybitnego włoskiego fizyka, noblisty). Liczbę mieszkańców przyjmij jako 1 mln.

*Ciało człowieka*

5. Człowiek mruga do 20 razy na minutę. Każde mrugnięcie zajmuje mniej niż pół sekundy. Oszacuj, przez jak długi czas w ciągu dnia mamy zamknięte oczy.
6. Oszacuj całkowitą objętość powietrza, jaką wydycha człowiek w czasie swojego życia (załóż, że każdy oddech to  $500 \text{ cm}^3$ ). Ile razy serce człowieka uderza w czasie średniego życia? Ile litrów krwi przetoczy? Załóż, że w każdym uderzeniu serce pompuje około  $50 \text{ cm}^3$  krwi.
7. **Baton kontra schody.** Baton czekoladowy ma ok. 250 kcal ( $1 \text{ kcal} \approx 4,2 \text{ kJ}$ ). Gdyby całą tę energię zamienić na energię potencjalną, na jaką wysokość wniósłby się człowiek o masie 70 kg? Ile to pięter? Sprawność mięśni to ok. 25% – jak zmienia to wynik i dlaczego mimo to „spalanie” batona na schodach idzie tak opornie?

*Masa, objętość, dane*

8. Miliarder oferuje Ci jeden miliard złotych w monetach 1 zł, pod warunkiem, że przeliczysz tę kwotę moneta po monecie (jedna na sekundę). Czy warto zaakceptować taką ofertę?
9. Oszacuj wagę i objętość złota wartego 1 miliard dolarów.
10. **Ile waży chmura?** Typowa chmura cumulus ma rozmiary rzędu  $1 \text{ km} \times 1 \text{ km} \times 1 \text{ km}$ , a woda w niej to drobne kropelki o łącznej gęstości około 0,5 g na metr sześcienny powietrza. Oszacuj masę wody w chmurze i porównaj z masą słonia (ok. 5 t). Dlaczego coś tak ciężkiego nie spada na głowę?
11. **Ciężarówka pełna kart microSD.** Karta microSD o pojemności 1 TB ma wymiary  $15 \times 11 \times 1 \text{ mm}$ . Oszacuj, ile danych przewozi ciężarówka z 20-tonową naczepą wypełnioną takimi kartami, jadąca z Wrocławia do Warszawy (ok. 4 h). Oblicz „przepustowość” takiego transportu w Gb/s i porównaj z łączem światłowodowym 10 Gb/s. Co ogranicza tę metodę – przepustowość czy opóźnienie?

*Wielkie odległości i wzrost wykładniczy*

12. Nie tak dawno temu w komputerach klasy PC powszechnie używane były dyskietki 3,5-calowe o pojemności 1,44 MB (o grubości około 3 mm). Oszacuj, ile takich dyskietek można by ułożyć jedna na drugiej na odległości Ziemia–Księżyc. Czy sumaryczna pojemność takiego stosu byłaby duża? Co w tym przypadku oznacza „duża” albo „mała”?

13. Oszacuj maksymalną odległość  $d$  (do horyzontu), jaką widzisz, stojąc na plaży. Załóż, że Twoje oczy znajdują się na wysokości  $h = 1,7$  m, promień Ziemi wynosi  $R = 6400$  km, a powietrze jest idealnie przejrzyste. *Wskazówka:* linia wzroku jest styczna do kuli – trójkąt prostokątny o bokach  $R$ ,  $d$  i  $R + h$ .
14. Na pierwszym polu szachownicy kładziemy jedno ziarno ryżu, na drugim – dwa, na trzecim – cztery i tak dalej, na następnym zawsze dwa razy więcej niż na poprzednim. Oszacuj objętość ryżu z ostatniego pola szachownicy.
15. **Kartka do Księżyca.** Kartka papieru ma grubość 0,1 mm. Ile razy trzeba ją złożyć na pół, żeby stos sięgnął Księżyca (384 000 km)? A ile razy, żeby sięgnął Słońca (150 mln km)? Dlaczego druga liczba jest tylko odrobinę większa od pierwszej? Porównaj z zadaniem o szachownicy.

## IV. Jednostki i analiza wymiarowa

### Wymiary i jednostki

1.  $A$  i  $B$  to wielkości fizyczne mające określone wymiary. Które z podanych działań mają sens fizyczny:  $A - B$ ,  $A + B$ ,  $A/B$ ,  $A \cdot B$ , jeśli wymiary  $A$  i  $B$  są: a) identyczne, b) różne?
2. Położenie cząstki zależy od czasu jak  $x(t) = A \sin(\omega t)$ . Jaki wymiar mają w układzie jednostek miar SI wielkości  $A$  i  $\omega$ ?
3. Definiujemy nową jednostkę czasu jako 1 mrugnięcie = 30 s. Jaka jest prędkość światła w metrach na mrugnięcie? Jaką drogę przebywa światło w czasie jednego mrugnięcia?
4. **Stopa na nanosekundę.** Admirał Grace Hopper, pionierka informatyki, rozdawała na wykładach kawałki drutu o długości „jednej nanosekundy”. Oblicz, ile centymetrów ma taki drut (drogę światła w 1 ns) i ile to w stopach (1 ft = 30,48 cm). Ile nanosekund „trwa” sygnał z procesora do pamięci RAM oddalonej o 10 cm i dlaczego przy zegarze 5 GHz ma to znaczenie?
5. **Kilowatogodzina.** Rachunek za prąd podaje zużycie w kWh. Wyraż 1 kWh w dżulach. Czajnik o mocy 2 kW gotuje litr wody w 3 minuty – ile kWh zużył i ile to kosztuje przy cenie ok. 1 zł/kWh? Ile razy można zagotować wodę z energii jednej pełnej baterii samochodu elektrycznego (ok. 60 kWh)?

### Analiza wymiarowa

6. **Który wzór jest dobry?** Na egzaminie ktoś napisał trzy wzory na okres wahadła:  $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ ,  $T = 2\pi\sqrt{g/L}$  oraz  $T = 2\pi L/g$ . Bez żadnej wiedzy o wahadle, wyłącznie z analizy wymiarowej, odrzuć błędne wzory. Czy analiza wymiarowa może wykryć błąd w czynniku  $2\pi$ ?
7. Wahadło matematyczne to punkt materialny zawieszony na nieważkiej nici o długości  $L$ . Zakładając, że okres drgań  $T$  wahadła jest potęgową funkcją  $L$  oraz przyspieszenia ziemskiego  $g$ :  $T \propto L^\alpha g^\beta$ , znaleźć wartości  $\alpha$  oraz  $\beta$ , porównując jednostki obu stron powyższego równania.
8. Przyspieszenie dośrodkowe  $a_d$  ciała w ruchu po okręgu o promieniu  $R$  zależy od prędkości tego ciała  $v$  i promienia  $R$  jak  $a_d = v^\alpha R^\beta$ . Wyznaczyć za pomocą analizy wymiarowej wartości wykładników  $\alpha$  i  $\beta$ . *Wskazówka:* wymiar przyspieszenia:  $\text{długość}/(\text{czas})^2$ , wymiar prędkości:  $\text{długość}/\text{czas}$ .
9. **Fale na morzu.** Prędkość fal na głębokiej wodzie zależy tylko od ich długości  $\lambda$  i przyspieszenia  $g$ :  $v \propto g^\alpha \lambda^\beta$ . Wyznacz  $\alpha$  i  $\beta$ . Które fale są szybsze – długie czy krótkie? Wyjaśnij, dlaczego po sztormie na oceanie najpierw dociera do brzegu długa, spokojna martwa fala, a dopiero potem krótkie, chaotyczne fale.
10. Wprowadzamy fundamentalne stałe: grawitacji  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ , Plancka  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$  oraz prędkość światła  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , przy czym  $\text{J} = \text{N m}$  oraz  $\text{N} = \text{kg m/s}^2$ . Obliczyć wartości oraz ustalić jednostki następujących wielkości:

$$l_P = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} \quad \text{oraz} \quad t_P = \frac{l_P}{c}.$$

11. **Wybuch Taylora.** W 1950 r. brytyjski fizyk G. I. Taylor oszacował tajną energię pierwszej bomby atomowej wyłącznie ze zdjęć kuli ognia opublikowanych w prasie. Załóż, że promień kuli  $R$  zależy tylko od energii wybuchu  $E$ , gęstości powietrza  $\rho$  i czasu  $t$ :  $R \propto E^a \rho^b t^c$ . Wyznacz  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Na zdjęciu z  $t = 25 \text{ ms}$  promień kuli wynosił ok. 140 m; przyjmując  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ , oszacuj  $E$  i wyraż ją w kilotonach TNT (1 kt TNT  $\approx 4,2 \cdot 10^{12} \text{ J}$ ).

## V. Opis ruchu

*Ruch prostoliniowy: prędkość, przyspieszenie, wykresy*

1. Skrytykuj następujące rozumowanie: „Achilles goni żółwia. Dobiega do miejsca, w którym żółw był przed chwilą, ten jednak przebył w tym czasie pewną drogę. Achilles znów dobiega itd. A więc nigdy nie dogoni żółwia” (paradoks Zenona z Elei).
2. Indianin Sokole Oko przejechał na koniu odległość  $S$  dzielącą jego wigwam od źródła wody pitnej z prędkością  $V = 10$  km/h. Z jaką prędkością powinien wrócić do obozu, aby jego prędkość średnia była równa: a)  $V/3$ ; b)  $2V$ ?
3. **Czas reakcji.** Kierowca zauważył przeszkodę, reaguje po 1 s, a potem hamuje z opóźnieniem  $8 \text{ m/s}^2$ . Oblicz całkowitą drogę zatrzymania przy 50 km/h i przy 70 km/h. O ile procent wzrosła prędkość, a o ile droga zatrzymania? Dlaczego pieszy, którego przy 50 km/h samochód ominąłby, przy 70 km/h zostaje potrącony z niemal pełną prędkością?
4. Położenie ciała poruszającego się wzdłuż osi  $x$  jest dane wzorem  $x(t) = 3t - 4t^2 + t^3$ , przy czym  $x$  wyrażono w metrach, a  $t$  w sekundach. a) Ile wynosi położenie ciała i jego prędkość w chwili  $t = 4$  s? b) Ile wynosi średnia prędkość ciała w przedziale czasu od  $t = 2$  s do  $t = 4$  s? c) Sporządź wykres  $x(t)$  dla  $0 \leq t \leq 4$  s i pokaż, jak, korzystając z tego wykresu, znaleźć odpowiedź na pytanie b).
5. **Zawracanie.** Położenie wózka na torze opisuje  $x(t) = 6t^2 - t^3$  ( $x$  w metrach,  $t$  w sekundach). Znajdź  $v(t)$  i  $a(t)$ . W której chwili wózek zawraca, kiedy jego prędkość jest największa i jaką drogę (nie przemieszczenie!) przebył w ciągu pierwszych 6 s? Naszkicuj  $x(t)$ ,  $v(t)$ ,  $a(t)$  jeden pod drugim i wskaż, co na jednym wykresie odpowiada zerom na drugim.
6. **Pole pod wykresem.** Bolid przyspiesza jednostajnie od 0 do 100 m/s w 5 s, jedzie 10 s ze stałą prędkością, a potem hamuje jednostajnie do zera w 3 s. Narysuj  $v(t)$ , oblicz drogę z pola pod wykresem, a następnie sprawdź to samo, całkując  $v(t)$  odcinkami. Dlaczego oba sposoby muszą dać ten sam wynik?
7. Cząstka rozpoczyna ruch przyspieszony z zerową prędkością początkową. Zależność przyspieszenia od czasu przedstawia wykres (rysunek z oryginalnej Listy 2). Wyznaczyć: (a) prędkość cząstki w chwilach  $t_1 = 10$  s i  $t_2 = 20$  s; (b) średnią prędkość w czasie od  $t_1$  do  $t_2$ ; (c) drogę przebytą przez nią po czasie  $t_2$ .
8. Od jadącego pociągu odczepił się ostatni wagon. Pociąg nadal jedzie z tą samą prędkością. Jaka jest względna droga przebyta przez pociąg i wagon do chwili zatrzymania się wagonu? Zakładamy, że wagon porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym.
9. Dom ma być pokryty dachem. Jakie nachylenie należy mu nadać, aby krople deszczu spływały po dachu w jak najkrótszym czasie? Zakładamy, że krople u szczytu dachu mają zerową prędkość początkową, a szerokość domu jest ustalona.
10. Oblicz prędkość, jaką uzyskasz, poruszając się przez 1 rok prostoliniowo z przyspieszeniem ziemskim  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Co ten wynik mówi o granicach mechaniki Newtona?

*Spadek swobodny i rzut pionowy*

11. Ciało spadające swobodnie pokonuje połowę drogi w ostatniej sekundzie ruchu. Z jakiej wysokości spada?
12. Ciało spada swobodnie z wysokości  $h = 10$  m. W tej samej chwili drugie ciało rzucono z wysokości  $H = 20$  m pionowo w dół z pewną prędkością początkową  $v_0$ . Wyznaczyć tę prędkość, jeśli oba ciała spadły na ziemię jednocześnie.

13. Od rakiety, która unosi się pionowo do góry, w momencie, gdy ma ona prędkość  $v_0$ , oderwał się na wysokości  $h$  jeden z niepotrzebnych już zbiorników paliwa. Znaleźć czas, po którym zbiornik ten opadnie na Ziemię, oraz jego prędkość w chwili upadku.

#### *Ruch względny*

14. **Ruchome schody.** Stojąc nieruchomo na ruchomych schodach, wjeżdżasz na górę w 60 s. Idąc po tych samych schodach, gdy są wyłączone, wchodzisz w 90 s. Ile czasu zajmie wejście, gdy idziesz po włączonych schodach? A ile, gdy idziesz pod prąd po schodach jadących w dół – i czy w ogóle dojdiesz?
15. Prędkość łódki względem wody wynosi  $v$ . Jak należy skierować łódź, aby przepłynąć rzekę w kierunku prostopadłym do brzegu? Woda w rzece płynie z prędkością  $u$ .
16. Rybak płynie łodzią w górę rzeki. Przepływając pod mostem, gubi wędkę. Po godzinie zauważa jej brak. Zawraca i dogania wędkę 6 km poniżej mostu. Jaka jest prędkość nurtu rzeki, jeżeli rybak wkłada tyle samo wysiłku w wiosłowanie, płynąc w górę i w dół rzeki? *Wskazówka:* spróbuj rozwiązać to zadanie, analizując sytuację, gdy nie ma prądu rzeki i kiedy jest.
17. **Deszcz na szybie.** Krople deszczu spadają pionowo z prędkością 8 m/s. Pociąg jedzie 30 m/s. Pod jakim kątem do pionu biegną smugi kropeł na bocznej szybie? Pasażer twierdzi, że „deszcz pada ukośnie” – kto ma rację, on czy obserwator na peronie? Jak z kąta smug i prędkości pociągu wyznaczyć prędkość spadania kropeł?
18. **Dron pod wiatr.** Dron leci względem powietrza z prędkością 10 m/s dokładnie na północ, a wiatr wieje z prędkością 6 m/s z zachodu na wschód. Znajdź prędkość drona względem ziemi (wartość i kierunek). W którą stronę pilot musi skierować dziób drona, żeby względem ziemi lecieć dokładnie na północ, i ile wtedy wyniesie jego prędkość względem ziemi?
19. Dwa samochody poruszają się po dwóch prostoliniowych i wzajemnie prostopadłych drogach w kierunku ich przecięcia ze stałymi szybkościami  $v_1 = 50$  km/h i  $v_2 = 100$  km/h. Przed rozpoczęciem ruchu pierwszy samochód znajdował się w odległości  $s_1 = 100$  km od skrzyżowania dróg, a drugi w odległości  $s_2 = 50$  km od ich przecięcia. Po jakim czasie od chwili rozpoczęcia ruchu odległość między samochodami będzie najmniejsza?
20. Dwóch pływaków skacze jednocześnie do rzeki o prędkości nurtu  $v$ . Prędkość każdego pływaka względem wody jest taka sama i wynosi  $c$ , gdzie  $c > v$ . Pierwszy pływak pokonuje z prądem rzeki odległość  $L$  i zawraca do punktu startu. Drugi płynie prostopadle do brzegów rzeki pomimo znoszącego go prądu, oddala się na odległość  $L$ , po czym zawraca do punktu startu. Który pływak wróci pierwszy?
21. Po rzece płynie łódka ze stałą względem wody prędkością  $u$ , prostopadłą do kierunku prądu. Woda w rzece płynie wszędzie równolegle do brzegów, ale wartość jej prędkości  $v$  zależy od odległości  $y$  od brzegu i dana jest wzorem  $v = v_0 \sin(\pi y/L)$ , gdzie  $v_0$  jest stałą, a  $L$  szerokością rzeki. Znaleźć kształt toru łodzi oraz odległość, na jaką woda zniosła łódkę w dół rzeki.

#### *Rzuty*

22. Kula pistoletowa wystrzelona poziomo przebiła dwie pionowo ustawione kartki papieru, umieszczone w odległościach  $l_1 = 20$  m i  $l_2 = 30$  m od pistoletu. Różnica wysokości, na jakich znajdują się otwory w kartkach, wynosi  $h = 5$  cm. Oblicz prędkość początkową kuli.
23. Na mistrzostwach świata w Tokio w 1991 r. Mike Powell skoczył w konkursie skoku w dal 8,95 m. Wyznaczyć jego prędkość początkową, jeśli kąt wybicia był równy  $40^\circ$ . Przyjąć  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>.

24. Lotnik, który leci na wysokości  $h$  w kierunku poziomym z prędkością  $v_x$ , puszcza ładunek, który ma upaść na ziemię w punkcie A. Pod jakim kątem lotnik powinien widzieć cel w chwili puszczenia ładunku, aby ten spadł w punkcie A? Za kąt widzenia celu przyjmij kąt pomiędzy kierunkiem poziomym a linią łączącą samolot z celem.
25. Piłkarz wykonujący rzut wolny z punktu leżącego na wprost bramki, w odległości 50 m od niej, nadaje piłce prędkość początkową o wartości 25 m/s. Wyznacz zakres kąta, pod jakim powinna zostać uderzona piłka, aby strzał trafił do bramki. Poprzeczka bramki znajduje się na wysokości 3,44 m nad boiskiem.
26. **Małpa i myśliwy.** Małpa wisi na gałęzi na wysokości  $H$ , w odległości poziomej  $D$  od myśliwego. Myśliwy celuje dokładnie w małpę i strzela; w chwili strzału małpa puszcza gałąź i zaczyna spadać. Pokaż, że pocisk trafi małpę niezależnie od swojej prędkości początkowej  $v_0$  (byle była dość duża, by dolecieć). Co powinna zrobić małpa, żeby uniknąć trafienia? Wyjaśnij wynik, przechodząc do układu spadającego swobodnie.
27. **Rzut na zboczu.** Ze stoku nachylonego pod kątem  $\alpha$  do poziomu wyrzucono kamień z prędkością  $v_0$  pod kątem  $\beta$  do powierzchni stoku (w górę zbocza). Znajdź zasięg rzutu mierzony wzdłuż stoku. Pod jakim kątem  $\beta$  zasięg jest największy? Sprawdź, że dla  $\alpha = 0$  odzyskujesz znany wynik  $45^\circ$ . *Wskazówka:* wygodnie jest obrócić układ współrzędnych tak, by oś  $x$  leżała wzdłuż stoku – wtedy  $\vec{g}$  ma dwie składowe.

*Ruch krzywoliniowy i ruch po okręgu*

28. Ruch punktu materialnego opisują równania:  $x = At$ ,  $y = Bt^2 + Ct$ . Wyznaczyć: a) tor ruchu, b) współrzędne kartezjańskie prędkości i przyspieszenia oraz ich wartości, c) składowe styczną i normalną przyspieszenia, d) wektor jednostkowy styczny do toru w chwili  $t$ .
29. Przy powierzchni Ziemi rzucono poziomo ciało z prędkością  $v_0$ . Znaleźć przyspieszenie styczne i normalne po czasie  $t_1$ .
30. **Nieważkość na orbicie.** Międzynarodowa Stacja Kosmiczna krąży po orbicie kołowej na wysokości ok. 400 km z prędkością 7,7 km/s (promień Ziemi 6400 km). Oblicz okres obiegu i przyspieszenie dośrodkowe stacji; wyraż je w jednostkach  $g$ . Skoro na tej wysokości grawitacja wynosi wciąż ok.  $0,9g$ , dlaczego astronauta są nieważcy? Ile wschodów Słońca widzi astronauta w ciągu doby?
31. Wskazówki godzinowa i minutowa pokrywają się. Po upływie jakiego czasu pokryją się ponownie?
32. Okrągła tarcza o promieniu  $R$  wiruje wokół swojej osi ze stałą prędkością kątową  $\omega$ . Ze środka tarczy wyrusza biedronka i porusza się wzdłuż wybranego promienia z prędkością o stałej wartości  $v_0$ . Znajdź: a) położenie oraz tor ruchu biedronki w nieruchomym układzie odniesienia we współrzędnych kartezjańskich i biegunowych; b) prędkość biedronki (jej składowe radialną i transversalną).

## VI. Zasady dynamiki Newtona

### *Sily i przyspieszenie w ruchu prostoliniowym*

1. Człowiek o masie  $m = 50$  kg wspina się po pionowej linie z przyspieszeniem równym  $a = 0,2$  m/s<sup>2</sup>. Oblicz napięcie liny. Masę liny zaniedbać, a przyspieszenie ziemskie przyjąć  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>.
2. Na dynamometrze zawieszono odważnik o masie  $m = 2$  kg. Podczas opuszczania dynamometru w dół wskazał on siłę o  $T_1 = 19,82$  N mniejszą niż w spoczynku, natomiast podczas podnoszenia siłę o  $T_2 = 19,82$  N odpowiednio większą. Z jakim przyspieszeniem poruszał się dynamometr w górę i w dół?
3. **Waga w windzie.** Stajesz na wadze łazienkowej w windzie. Na parterze pokazuje 70 kg, tuż po ruszeniu 77 kg, a przed zatrzymaniem na 10. piętrze 64 kg. Wyznacz przyspieszenie windy w obu fazach i jego zwrot. Co pokaże waga, gdyby lina windy pękła? Dlaczego waga „mierzy” siłę nacisku, a nie masę?
4. Samolot o ciężarze  $Q = 231$  kN startujący z lotniskowca wznosi się po osiągnięciu prędkości 85 m/s. Ile to jest km/h? Silnik samolotu wytwarza siłę ciągu  $F_1 = 107$  kN na lotniskowcu o długości 90 m. Z jaką minimalną stałą siłą powinna działać wyrzutnia lotniskowca, aby samolot wznosił się?
5. Na gładkim stole położono dwa ciężarki o masach  $m_1 = 250$  g i  $m_2 = 500$  g połączone gumką. W pewnej chwili ciężarki te rozsunęto, napinając gumkę, a następnie puszczono. Lżejszy z nich zaczął poruszać się z przyspieszeniem o wartości  $a_1 = 0,2$  m/s<sup>2</sup>. Z jakim przyspieszeniem poruszał się drugi ciężarek?
6. Na końcach nieważkiej nici, przerzuconej przez nieważki blok, zawieszono ciężarki o masach  $M$  i  $m$ , przy czym  $M > m$ . Lżejszy z nich znajduje się o  $l$  [m] niżej od cięższego. Wszelkie opory ruchu pomijamy. Po jakim czasie ciężarki znajdą się na tej samej wysokości, jeśli puścimy je swobodnie?
7. Na stole położono jedną za drugą masy  $m_1$ ,  $m_2$  i  $m_3$  połączone nićmi; do  $m_1$  przywiązana jest nić przerzucona przez bloczek na krawędzi stołu, na której wisi masa  $M$ . Znaleźć: a) przyspieszenie  $a$  układu, b) naprężenia wszystkich nici. Tarcie mas o płaszczyznę stołu i tarcie w bloczku pominać.
8. Balon o masie  $M$  opada w dół z prędkością  $v$ . Jaką masę balastu należy z niego wyrzucić, aby zaczął się on wznosić z taką samą prędkością? Na balon działa siła wyporu powietrza  $W$ . *Wskazówka:* na balon działa siła ciężkości, siła wyporu powietrza i siła oporu ośrodka proporcjonalna do prędkości.

### *Tarcie i równia pochyła*

9. **Kubek kawy w Pendolino.** Pociąg jedzie 160 km/h; na stoliku stoi kubek, a współczynnik tarcia między kubkiem a blatem wynosi 0,3. Z jakim maksymalnym opóźnieniem pociąg może hamować, żeby kubek się nie przesunął, i jaka jest wtedy najkrótsza droga hamowania? Porównaj z rzeczywistą drogą hamowania pociągu (ok. 1 km) – co to mówi o komforcie pasażerów?
10. Wiadomo, że przy wciąganiu ciała o masie  $m$  ruchem jednostajnym po chropowatej równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha$  należy przyłożyć daną stałą siłę  $F_0$ . Z jakim przyspieszeniem będzie się zsuwało ciało puszczane swobodnie w dół tej równi?
11. Jaką minimalną siłą należy działać poziomo na ciało A o masie  $M_A$ , aby ciało B o masie  $M_B$ , leżące na A, nie poruszało się względem niego, jeśli: a) współczynnik tarcia między A i B wynosi  $f_{AB}$ , a A porusza się po idealnie gładkiej powierzchni? b) współczynnik tarcia między A i B wynosi  $f_{AB}$ , a między A i poziomą powierzchnią wynosi  $f$ ? Obliczenia wykonać dla  $f_{AB} = 0,6$ ,  $f = 0,4$ ,  $M_A = 20$  kg i  $M_B = 2$  kg.

12. Na wierzchołku równi pochyłej o kącie  $\alpha = 30^\circ$  utrzymywane są w spoczynku przez siłę zewnętrzną  $F_z$  dwa stykające się ze sobą klocki o masach  $m_1 = 70$  kg (niżej) i  $m_2 = 50$  kg (wyżej). Współczynniki tarcia wynoszą odpowiednio  $f_1 = 0,1$  i  $f_2 = 0,4$ . Wyznaczyć: (a) minimalną i maksymalną wartość  $F_z$ , przy której klocki spoczywają; (b) przyspieszenia obu klocków, gdy usuniemy siłę zewnętrzną; (c) odległość między klockami po czasie  $t = 5$  s; (d) ich przyspieszenia w przypadku, gdy zamienimy je miejscami i usuniemy siłę zewnętrzną.
13. **Klocek w przyspieszającym wózku.** Na gładkiej równi o kącie  $\alpha$ , zamocowanej na wózku, leży klocek. Z jakim przyspieszeniem poziomym  $a$  musi poruszać się wózek, żeby klocek nie zsuwał się względem równi? Rozwiąż zadanie dwa razy: w układzie inercyjnym (ziemia) i w układzie wózka (z siłą bezwładności). Jak wynik łączy się z zasadą równoważności Einsteina i „pochyłym” efektywnym polem grawitacyjnym?
14. Punkt materialny o masie  $m$  znajduje się na zboczu w kształcie paraboli o równaniu  $y = ax^2$ , gdzie  $a > 0$ . Współczynnik tarcia jest równy  $f$ . Znajdź maksymalną wysokość, na której ciało będzie pozostawać w spoczynku.
15. **Lina na pachołku.** Jeden marynarz trzyma statek przy nabrzeżu, owijając cumę kilka razy wokół pachołka. Rozważ mały łuk liny o kącie  $d\theta$  na walcu ze współczynnikiem tarcia  $\mu$ ; zapisz warunki równowagi sił i pokaż, że napięcia po obu stronach spełniają  $T_2 = T_1 e^{\mu\theta}$ , gdzie  $\theta$  to całkowity kąt owinięcia. Dla  $\mu = 0,3$  oblicz, ile razy trzeba owinąć linę, żeby siłą 200 N utrzymać statek ciągnący z siłą 50 kN. Gdzie jeszcze spotykasz ten efekt (wspinaczka, pasek klinowy, kołowrotek)?

#### *Ruch po okręgu*

16. Droga ma łagodny płaski zakręt o promieniu  $R = 100$  m. Jakie powinno być ograniczenie prędkości na tym zakręcie (wyrażone w km/h), jeśli w niesprzyjających warunkach współczynnik tarcia  $\mu = 0,2$ ?
17. Samochód porusza się po łuku drogi o promieniu  $R$ . Powierzchnia drogi jest nachylona pod kątem  $\alpha$  względem poziomu w kierunku do wnętrza zakrętu. Współczynnik tarcia wynosi  $f$ . Pokazać, że maksymalna prędkość, przy której samochód nie wypadnie z zakrętu na skutek poślizgu, spełnia równość
- $$v_{\max}^2 = Rg \frac{f + \operatorname{tg} \alpha}{1 - f \operatorname{tg} \alpha}.$$
18. **Rowerzysta na zakręcie.** Rowerzysta wchodzi w zakręt o promieniu  $R = 20$  m z prędkością 25 km/h. Pod jakim kątem do pionu musi pochylić rower, żeby nie przewrócić się (*Wskazówka:* wypadkowa siły nacisku i tarcia od podłoża musi przechodzić przez środek masy)? Jaki minimalny współczynnik tarcia opon o asfalt jest do tego potrzebny? Co się dzieje na mokrej kostce brukowej?
19. **Wirówka w pralce.** Bęben pralki o promieniu 25 cm wiruje z prędkością 1200 obr/min. Oblicz przyspieszenie dośrodkowe na ścianie bębna i wyraż je w jednostkach  $g$ . Ile wynosi siła nacisku mokrej skarpetki o masie 50 g na bęben, gdy jest ona w najwyższym i w najniższym punkcie? Dlaczego woda wylatuje przez otwory, a skarpetka nie „spada”, gdy jest na górze?
20. Wyznaczyć nacisk ciała pilota o masie  $M$  na fotel samolotu wykonującego pętlę o promieniu  $R = 6$  km leżącą w płaszczyźnie pionowej, gdy samolot jest: a) w najniższym punkcie okręgu (fotel jest pod ciałem pilota), a prędkość samolotu wynosi 280 m/s; b) w najwyższym punkcie pętli (fotel jest nad pilotem), a prędkość samolotu wynosi 120 m/s. Obliczenia wykonać dla  $M = 62$  kg. W jakim punkcie pętli i przy jakich wartościach podanych parametrów pilot przez chwilę znajdzie się w stanie nieważkości?

- 21.** Wahadło matematyczne można wprawić w ruch po okręgu, otrzymujemy wówczas wahadło stożkowe. Załóżmy, że wychylenie takiego wahadła (kąt między nicią a pionem) wynosi  $\theta$ . Oblicz okres obiegu takiego wahadła.
- 22. Karuzela łańcuchowa.** Na karuzeli w wesołym miasteczku krzeselka wiszą na łańcuchach o długości 5 m, zaczepionych w odległości 4 m od osi obrotu. Karuzela wykonuje jeden obrót na 6 s. Oblicz kąt odchylenia łańcuchów od pionu oraz siłę napięcia łańcucha dla pasażera o masie 60 kg. Czy dziecko o masie 20 kg odchyli się pod innym kątem niż dorosły? Odpowiedź uzasadnij.
- 23. Moneta na gramofonie.** Moneta leży w odległości  $r = 12$  cm od osi talerza gramofonu; współczynnik tarcia statycznego wynosi 0,25. Przy jakiej prędkości obrotowej (w obr/min) moneta zacznie się zsuwać? Czy talerz przy  $33\frac{1}{3}$  i 45 obr/min ją utrzyma? Gdy moneta już się zsuwa, w którą stronę porusza się względem talerza – po promieniu na zewnątrz czy po spirali? Narysuj tor w układzie talerza i w układzie pokoju.

#### *Równania ruchu z siłami zmiennymi*

- 24.** Cząstka o masie  $m = 3$  kg porusza się pod wpływem siły zależnej od czasu  $\vec{F} = (15t, 3t - 12, -6t^2)$  N (czas w sekundach). Przyjmując warunki początkowe  $\vec{r}_0 = (5, 2, -3)$  m oraz  $\vec{v}_0 = (2, 0, 1)$  m/s, znajdź położenie i prędkość cząstki w funkcji czasu. Co oznacza, że mechanika klasyczna jest w pełni deterministyczna?
- 25.** Na ciało o masie  $m$  działa siła hamująca proporcjonalna do prędkości:  $F = -bv$ ,  $b$  jest stałą dodatnią. Znajdź prędkość i przebytą drogę w funkcji czasu oraz drogę pokonaną do chwili zatrzymania się ciała. Prędkość początkowa ciała wynosi  $v_0$ , przyjmij też, że  $s(0) = 0$ .
- 26.** Na ciało o masie  $m$  działa siła hamująca proporcjonalna do kwadratu prędkości  $F = -kv^2$ ,  $k$  jest stałą dodatnią. Znajdź prędkość i przebytą drogę w funkcji czasu oraz drogę pokonaną do chwili, gdy prędkość ciała zmaleje do połowy. Prędkość początkowa ciała wynosi  $v_0$ , przyjmij też, że  $s(0) = 0$ .
- 27. Skoczek spadochronowy.** Na skoczek o masie  $m$  spadającego pionowo działa ciężar i opór powietrza  $F = kv^2$ . Zapisz równanie ruchu, znajdź prędkość graniczną  $v_g$  i pokaż, że

$$v(t) = v_g \tanh\left(\frac{gt}{v_g}\right) \quad \text{dla } v(0) = 0.$$

Po jakim czasie skoczek osiąga 95% prędkości granicznej? Dla  $m = 80$  kg i  $v_g = 55$  m/s (skok „na brzuchu”) oblicz  $k$ . Dlaczego po otwarciu spadochronu skoczek nie „leci w górę”, choć tak to wygląda na filmach?

- 28. Łańcuch zsuwający się ze stołu.** Jednorodny łańcuch o długości  $L$  leży na gładkim stole, a jego kawałek o długości  $x_0$  zwisa z krawędzi. Pokaż, że długość zwisającej części spełnia równanie  $\ddot{x} = (g/L)x$ , i znajdź  $x(t)$ . Po jakim czasie łańcuch cały zsunie się ze stołu, jeśli  $L = 1$  m, a  $x_0 = 10$  cm? Czym różni się to równanie od równania oscylatora  $\ddot{x} = -(k/m)x$  i co ta różnica znaku oznacza dla ruchu?

## VII. Praca i energia. Zasada zachowania energii

### *Praca*

1. Wyznacz pracę wciągnięcia ciężaru po równi pochyłej, jeśli masa tego ciężaru wynosi  $m = 100$  kg, długość równi  $s = 2$  m, kąt nachylenia równi do poziomu  $\alpha = 30^\circ$ , a współczynnik tarcia wynosi  $f = 0,1$ .
2. Jaką pracę należy wykonać, aby zwiększyć długość sprężyny o  $d$ ? Wiadomo, że pod wpływem danej siły  $F_0$  sprężyna o współczynniku sprężystości  $k$  wydłuża się o długość  $a$ .
3. Na podłodze leży jednorodny łańcuch o masie  $m$  i długości  $l$ . Jeden z jego końców podnosimy do góry, dopóki cały łańcuch nie oderwie się od podłogi. Wyznacz minimalną wartość pracy, jaką należy wykonać przeciwko sile ciężkości łańcucha, aby podnieść go z podłogi.
4. Z piwnicy o powierzchni  $S$  należy wypompować wodę, której poziom znajduje się na wysokości  $h$  nad podłogą. Wysokość piwnicy wynosi  $H$ . Jaką pracę trzeba przy tym wykonać? Gęstość wody wynosi  $\rho$ .
5. Mała masa  $m$  jest wciągana na szczyt półcyindra o promieniu  $R$  za pomocą linki prowadzonej stycznie do jego powierzchni. Ruch odbywa się bez tarcia. Pokaż, że wartość siły naciągu linki wynosi  $F = mg \cos \theta$  ( $\theta$  – kąt między promieniem do masy a poziomem), jeśli masa porusza się ze stałą prędkością. Znaleźć pracę wykonaną przy wciąganiu masy od podstawy na szczyt półcyindra (od  $\theta = 0$  do  $\theta = 90^\circ$ ). Jakiego wyniku spodziewamy się natychmiast?

### *Zasada zachowania energii*

6. Sanki ześlizgują się z pagórka, którego zbocze ma długość  $d$  i jest nachylone pod kątem  $\alpha$  do poziomu. Jaką odległość  $x$  przebędą sanki na odcinku poziomym po zjechaniu ze zbocza, jeżeli na całej drodze współczynnik tarcia wynosi  $f$ ?
7. Wartość prędkości początkowej kamienia rzuconego ukośnie jest  $n$  razy większa od jego prędkości w najwyższym punkcie toru. Pod jakim kątem wyrzucono kamień?
8. Piłka do kosza spada z wysokości  $H$  na podłogę i odbija się od niej wielokrotnie (zderzenia niesprężyste). Jaką prędkość początkową  $v_0$  należy nadać piłce, aby po  $n$  odbiciach wzniosła się na pierwotną wysokość, jeżeli wiadomo, że przy każdym odbiciu piłka traci  $k$ -tą część swojej energii. Przyspieszenie ziemskie wynosi  $g$ .
9. **Bungee.** Skoczek o masie 70 kg skacze z mostu na linie bungee o długości swobodnej 20 m i współczynniku sprężystości  $k = 100$  N/m (lina zachowuje się jak sprężyna dopiero po naprężeniu). Na jaką głębokość poniżej mostu dotrze skoczek? Jaka maksymalna siła działa na niego ze strony liny i ile to jego ciężarów? W którym punkcie prędkość skoczka jest największa – czy jest to koniec swobodnej liny?
10. **Wahadło z gwoździem.** Kulka wisi na nici o długości  $L$ . Pionowo pod punktem zawieszenia, w odległości  $d$  od niego, wbity jest gwoździec, o który nieć zaczepia się w dolnym położeniu. Z jakiego minimalnego kąta wychylenia trzeba puścić kulkę, żeby po zaczepieniu obiegła gwoździec po pełnym okręgu z napiętą nicią? Pokaż, że dla  $d < 3L/5$  nie uda się to nawet z poziomu.
11. Paciorek nadziany na drut ślizga się bez tarcia po nachylonym drucie zakończonym pętlą o promieniu  $R$ . Jaka powinna być początkowa wysokość  $H$ , aby paciorek pokonał całą pętlę? Czy odpowiedź zmienia się, gdy zamiast paciorka na drucie będzie kulka tocząca się po rynnie (bez drutu, który ją trzyma)?
12. W najwyższym punkcie kuli o promieniu  $R$  znajduje się małe ciało w położeniu równowagi chwiejnej. Przy najmniejszym wychyleniu z tego położenia ciało zacznie się zsuwać po powierzchni

kuli. Pod jakim kątem  $\alpha$  małe ciało odpadnie od powierzchni kuli? Skomentuj dość zaskakujący wynik.

### *Moc i energia w technice*

- 13. Hamowanie z odzyskiem.** Samochód elektryczny o masie 1500 kg hamuje od 90 km/h do zera. Ile energii kinetycznej traci? Jaką jej część (w kWh) odzyska bateria, jeśli sprawność rekuperacji wynosi 60%? Ile takich hamowań „napędza” jedno zagotowanie litra wody w czajniku (ok. 0,1 kWh)? Dlaczego w mieście samochód elektryczny zużywa mniej energii niż na autostradzie, a spalinowy odwrotnie?
- 14. Moc rowerzysty.** Rowerzysta z rowerem (łącznie 80 kg) wjeżdża ze stałą prędkością 15 km/h na podjazd o nachyleniu 8% (tzn. 8 m wzniesienia na 100 m drogi). Oblicz moc, jaką rozwija przeciwko sile ciężkości (opory pomini). Porównaj z mocą kolarza Tour de France na podejździe (ok. 400 W) i z mocą żarówki. Jak długo taki rowerzysta musiałby jechać, żeby „odpracować” batona z zadania o schodach?
- 15. Skąd wiatrak bierze energię?** Powietrze o gęstości  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$  wieje z prędkością  $v$  przez koło o średnicy  $D$  zakreślane przez łopaty turbiny. Pokaż, że energia kinetyczna przepływająca przez to koło w jednostce czasu wynosi  $P = \frac{1}{2}\rho \frac{\pi D^2}{4} v^3$ . Oblicz  $P$  dla  $D = 120 \text{ m}$  i  $v = 10 \text{ m/s}$ . Dlaczego zależność od  $v^3$  sprawia, że lokalizacja turbiny jest tak ważna? Wyjaśnij jakościowo, dlaczego turbina nie może odebrać powietrzu całej tej energii (granica Betza to ok. 59%).

## VIII. Zasada zachowania pędu, zderzenia, środek masy, napęd rakietowy

### *Pęd i popęd siły*

1. Kula bilardowa o masie  $m_1 = 0,1$  kg i prędkości  $v_0 = 10$  m/s uderza w bandę stołu bilardowego i odbija się pod kątem  $\alpha = 60^\circ$ . Wyznacz wartość średniej siły, z jaką bila działa na bandę w trakcie zderzenia trwającego  $\Delta t = 0,2$  s.
2. **Pas i poduszka.** Kierowca o masie 75 kg jedzie 50 km/h i uderza w przeszkodę. Bez pasów zatrzymuje go kierownica w czasie ok. 0,02 s; z pasami i poduszką zatrzymanie trwa ok. 0,2 s. Oblicz średnią siłę w obu przypadkach i wyraż ją w jednostkach ciężaru kierowcy. Zmiana pędu jest ta sama – co więc ratuje życie?

### *Zasada zachowania pędu i środek masy*

3. **Odrzut.** Z karabinu o masie 4 kg wylatuje pocisk o masie 10 g z prędkością 800 m/s. Oblicz prędkość odrzutu karabinu oraz energię kinetyczną pocisku i karabinu. Pędy są równe co do wartości – dlaczego więc pocisk jest zabójczy, a kolba tylko boli? Co zmienia się, gdy strzelec mocno dociska kolbę do ramienia?
4. **Astronauta i klucz.** Astronauta o masie 100 kg (ze skafandrem) dryfuje nieruchomo 10 m od stacji, bez linki. Ma przy sobie klucz o masie 1 kg i może go rzucić z prędkością 10 m/s. Po jakim czasie dotrze do stacji? Czy lepiej rzucić klucz, czy zdjąć i rzucić 10-kilogramowy plecak z tą samą energią mięśni?
5. Człowiek o masie  $m$  przechodzi z jednego końca łodzi o masie  $M$  i długości  $L$  na drugi jej koniec. O jaką odległość przemieści się łódź, jeżeli zaniedbamy wpływ sił zewnętrznych?
6. Na łodzi znajdują się: uczestnik ekspedycji polarnej o masie  $m = 80$  kg oraz uśpiony przez niego niedźwiedź polarny o nieznanej masie  $M$ , oboje połączeni napiętą liną o długości  $l = 5$  m. Człowiek ciągnie do siebie przewiązanego liną niedźwiedzia, sam przesuwając się po łodzi o odległość  $d = 4$  m. Ile waży miś? *Wskazówka:* zaniedbaj tarcie i zauważ, że środek masy układu nie zmienia swego położenia. [Odp. 320 kg]
7. Ciało o masie  $m = 2$  kg znajduje się początkowo na wierzchołku jednorodnego klina o masie  $M = 8$  kg, wysokości  $h = 2$  m i długości  $L = 6$  m, mogącego przesunąć się po poziomej płaszczyźnie. Zakładając, że tarcie w układzie nie występuje, wyznacz przesunięcie  $d$  klina w momencie, gdy ciało zsunie się na dół. *Wskazówka:* współrzędna  $x$  środka masy nie zmienia się.

### *Zderzenia*

8. Dwa klocki o masach  $m_1$  i  $m_2$ , z których jeden jest początkowo nieruchomy, zderzają się na poziomej, idealnie gładkiej powierzchni. Zderzenie jest doskonale sprężyste. Po zderzeniu klocki odbijają się od siebie z prędkościami równymi co do wartości, ale przeciwnie skierowanymi. Wyznacz stosunek mas klocków.
9. (Przeliczenie problemu z wykładu.) Dwie kule odpowiednio o masach  $m_1$  i  $m_2$  oraz prędkościach  $v_1$  i  $v_2$ , przy czym  $v_2 = 0$  (druga kula spoczywa), zderzają się centralnie i doskonale sprężysto. Znajdź prędkości kul po zderzeniu. Przeanalizuj przypadki szczególne, np. gdy  $m_1$  jest dużo większa od  $m_2$  (jak ma to miejsce przy grze w ping-ponga: ciężka rakietka – bardzo lekka piłeczka).
10. Poruszające się ciało o masie  $M$  zderza się z nieruchomym ciałem o masie  $m$ , przy czym teraz zderzenie jest idealnie niesprężyste i centralne (np. dwie kule z plasteliny). Oblicz, jaka część początkowej energii kinetycznej ciała o masie  $M$  zamienia się po zderzeniu w ciepło. Rozwiąż to zadanie w postaci ogólnej, a następnie dla przypadków:  $m = M$  oraz  $M = 9m$ .

11. Na jaką wysokość, liczoną od położenia równowagi, wzniesie się wahadło balistyczne (klocek zawieszony na dwóch linkach) o masie  $M = 10$  kg, gdy utkwii w nim pocisk o masie  $m = 0,1$  kg, lecący z prędkością  $v = 200$  m/s?
12. Kula bilardowa poruszająca się z prędkością  $v_1 = 5$  m/s zderza się niecentralnie z drugą identyczną kulą. Po zderzeniu pierwsza kula porusza się z prędkością  $u_1 = 4,33$  m/s pod kątem  $\alpha = 30^\circ$  względem początkowego kierunku ruchu. Zakładając, że zderzenie jest idealnie sprężyste, wyznacz prędkość drugiej kuli (patrz układ równań z wykładu o pędzie).
13. **Piłka na piłce.** Piłeczkę tenisową (masa  $m$ ) kładziemy na piłce do koszykówki (masa  $M \gg m$ ) i upuszczamy obie z wysokości  $h$ . Traktując to jako dwa kolejne zderzenia sprężyste (najpierw duża piłka z podłogą, potem mała z dużą), pokaż, że piłeczka tenisowa odbija się z prędkością ok. 3 razy większą od prędkości uderzenia, czyli na wysokość ok.  $9h$ . Wykonaj ten eksperyment. Skąd piłeczka „bierze” tę energię?
14. **Asysta grawitacyjna.** Sonda leci z prędkością  $v = 10$  km/s (względem Słońca) naprzeciw Jowisza, który porusza się z prędkością  $V = 13$  km/s. Sonda okrąża planetę i wylatuje w kierunku przeciwnym do tego, z którego przyleciała. Potraktuj przelot jak centralne zderzenie sprężyste bardzo lekkiej piłeczki z bardzo ciężką rakieta (zadanie o ping-pongu): przejdź do układu Jowisza, odbij, wróć do układu Słońca. Jaką prędkość ma sonda po przelocie? Skąd wzięła się dodatkowa energia i co „straciła” planeta?

#### *Napęd rakietowy*

15. (Napęd odrzutowy.) Silniki pierwszego stopnia rakiety Saturn V, która wyniosła w kosmos misję Apollo, zużywały paliwo w tempie 15 ton/s, a powstające spaliny wyrzucane były z prędkością  $u = 2,6 \cdot 10^3$  m/s. Oblicz siłę ciągu silników tej rakiety (siła ciągu silnika  $F_c = u \frac{dM}{dt}$ ). Oblicz przyspieszenie rakiety w momencie startu, jeśli jej początkowa masa wynosiła  $m_0 = 3,0 \cdot 10^6$  kg.
16. Odległość do najbliższej gwiazdy wynosi około 4 lat świetlnych. Gdyby chcieć wysłać do niej sondę kosmiczną i przesłać wyniki badań w rozsądnym czasie (wszystko w kilkadziesiąt lat), musielibyśmy nadać jej prędkość rzędu  $0,1c = 3 \cdot 10^7$  m/s. Jaką część początkowej masy pojazdu musiałoby stanowić paliwo, gdyby posługiwać się konwencjonalnym napędem chemicznym (patrz zadanie poprzednie o rakiecie Saturn V; przyda się równanie Ciołkowskiego  $v = u \ln(m_0/m_k)$ )?

## IX. Elementy bryły sztywnej

*Obrót wokół osi: moment bezwładności, moment pędu*

- 1. Jajko surowe czy gotowane?** Dwa jajka – surowe i ugotowane na twardo – wprawiamy w wirowanie na stole, a po chwili na ułamek sekundy zatrzymujemy palcem i puszczone. Jedno z nich rusza ponownie. Które i dlaczego? Które jajko trudniej rozkręcić? Zrób ten eksperyment i wyjaśnij go, posługując się pojęciami bryły sztywnej i momentu pędu.
- 2. Koło zamachowe** o masie  $m = 100$  kg i promieniu  $R = 0,5$  m wiruje wokół osi pionowej, która przechodzi przez jego środek, wykonując  $n = 600$  obr/min. Przy hamowaniu koło zamachowe zatrzymuje się po upływie czasu  $t_0 = 1$  min. Oblicz moment stałej siły hamującej i liczbę obrotów do całkowitego zatrzymania.
- 3. Łyżwiarka.** Łyżwiarka wiruje w piruecie z rozłożonymi rękami, wykonując 2 obroty na sekundę; jej moment bezwładności wynosi wtedy  $3 \text{ kg m}^2$ . Gdy przyciąga ręce do ciała, moment bezwładności maleje do  $1 \text{ kg m}^2$ . Ile obrotów na sekundę wykonuje teraz? Oblicz energię kinetyczną przed i po – skąd wzięła się różnica? Kto wykonał pracę?
- 4. Wahadło** składa się z jednorodnego krążka o promieniu  $r = 10$  cm i masie  $m_1 = 500$  g oraz jednorodnego pręta o długości  $d = 100$  cm i masie  $m_2 = 500$  g; krążek zamocowany jest na końcu pręta. (a) Oblicz moment bezwładności wahadła względem punktu zawieszenia, który znajduje się na drugim końcu pręta. (b) Wyznacz odległość między punktem zawieszenia a środkiem masy wahadła. (c) Pokaż, że w przypadku niewielkich kątów odchylenia od położenia równowagi wahadło wykonuje drgania harmoniczne. (d) Podaj okres drgań wahadła. (e) Jaki będzie okres drgań, kiedy pojawi się tłumienie o wartości współczynnika  $\beta = \omega_0/10$ ?
- 5. Padający komin.** Jednorodny pręt (komin, słup, drzewo) o długości  $L$  stoi pionowo i zaczyna się przewracać, obracając się wokół dolnego końca. Znajdź przyspieszenie kątowe w funkcji kąta  $\varphi$  od pionu i pokaż, że przy odpowiednio dużym kącie przyspieszenie liniowe wolnego końca przekracza  $g$ . Jabłko puszczone z wierzchołka w chwili startu – czy spadnie szybciej niż wierzchołek? Dlaczego wysokie kominy przy wyburzaniu pękają w połowie wysokości, zanim dotkną ziemi?

*Toczenie*

- 6.** Pokaż, że podczas toczenia się koła bez poślizgu prędkość środka masy koła jest równa prędkości liniowej punktu z obwodu względem środka. Jaka jest chwilowa prędkość punktu koła stykającego się z podłożem, a jaka punktu najwyższego? Dlaczego szprychy w dolnej części koła roweru na zdjęciu są ostre, a w górnej rozmyte?
- 7.** Kula o masie  $M = 2$  kg i promieniu  $R = 30$  cm stacza się bez poślizgu po równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha = 30^\circ$ . Znajdź zależność prędkości kuli od czasu.
- 8. Wyścig po równi.** Z tej samej wysokości puszczone jednocześnie: kulę pełną, walec pełny, cienkościenną obręcz i pustą w środku kulę (cienkościenną). Wszystkie toczą się bez poślizgu. Ustal kolejność na mecie i pokaż, że nie zależy ona ani od mas, ani od promieni. Co decyduje: masa, promień czy „gdzie jest masa”? Jaki minimalny współczynnik tarcia jest potrzebny, żeby walec pełny toczył się bez poślizgu po równi o kącie  $\alpha$ ?
- 9. Szpulka nici.** Szpulka o promieniu zewnętrznym  $R$  i promieniu wewnętrznym (na który nawinięta jest nić)  $r$  leży na szorstkim stole. Ciągniemy za nić pod kątem  $\theta$  do poziomu. Rozważając moment sił względem punktu styku szpulki ze stołem, pokaż, że szpulka toczy się *w stronę* ręki dla  $\cos \theta > r/R$ , a *od ręki* dla  $\cos \theta < r/R$ ; przy  $\cos \theta = r/R$  ślizga się bez toczenia. Sprawdź to na prawdziwej szpulce.

## X. Drgania: oscylator harmoniczny, tłumiony i wymuszony

### *Oscylator harmoniczny*

1. Jak wpłynie podwojenie amplitudy na następujące cechy ruchu harmonicznego prostego: okres, stała sprężysta, całkowita energia mechaniczna, maksymalna prędkość, maksymalne przyspieszenie?
2. Napisać równanie ruchu drgającego punktu materialnego, który wykonuje drgania o amplitudzie 5 cm, okresie 2 s i fazie początkowej  $45^\circ$ .
3. Na sprężynie jest zawieszona szalka z odważnikami. Okres drgań pionowych jest wówczas równy  $T_1$ . Po obciążeniu szalki dodatkowym odważnikiem okres drgań wynosi  $T_2$ . O ile wydłużyła się sprężyna pod wpływem dodatkowego obciążenia?
4. Platforma wykonuje pionowe drgania harmoniczne o amplitudzie  $A$ . Jaka może być maksymalna częstość drgań platformy, aby leżące na niej ciało nie straciło z nią kontaktu?
5. Na sprężynie zawieszamy drugą sprężynę, a na niej ciężarek o masie  $m$ . Współczynniki sprężystości sprężyn wynoszą odpowiednio  $k_1$  i  $k_2$ . Wyznacz okres drgań takiego oscylatora. Jaki będzie okres, gdy te same sprężyny połączymy równolegle?
6. W rurce zgiętej w kształcie litery U znajduje się słup wody o długości  $l$ . W chwili początkowej poziom w jednym ramieniu rurki jest wyższy niż w drugim. Jaki będzie okres drgań słupa wody? Napisać równanie ruchu dla tego układu i podać jego rozwiązanie. W chwili początkowej różnica poziomów cieczy wynosi  $h$ . Pomiń opory ruchu.
7. **Tunel przez Ziemię.** Przez środek jednorodnej kuli ziemskiej wywiercono tunel. Wewnątrz kuli siła grawitacji jest proporcjonalna do odległości od środka (pochodzi tylko od materii „pod nami”):  $F = -mgr/R_Z$ . Pokaż, że ciało puszczane do tunelu wykonuje drgania harmoniczne, i oblicz okres oraz maksymalną prędkość (w środku Ziemi). Porównaj okres z okresem satelity krążącego tuż nad powierzchnią Ziemi. Przypadek?

### *Wahadła*

8. **Huśtawka.** Huśtawka w parku ma łańcuchy o długości 2,5 m. Oblicz okres jej drgań. Dlaczego, żeby się rozbijać, dziecko wstaje w najniższym punkcie i kuca w najwyższym (o ile i w którą stronę zmienia to okres)? Czy ciężki dorosły huśta się wolniej niż lekkie dziecko?
9. Dwa wahadła matematyczne wykonują w tym samym czasie odpowiednio  $n_1 = 10$  drgań i  $n_2 = 6$  drgań. Różnica długości wahadeł wynosi  $\Delta l = 16$  cm. Oblicz długości  $l_1$  oraz  $l_2$  wahadeł.

### *Oscylator tłumiony*

10. Ruch drgający tłumiony opisany jest równaniem  $x(t) = 10 e^{-0,2t} \cos(8\pi t)$ . Znajdź amplitudę po 10 pełnych drganiach.
11. Oblicz logarytmiczny dekrement tłumienia, jeżeli w ciągu czasu  $t = 10$  s trwania ruchu drgającego energia mechaniczna drgającego punktu maleje o połowę. Okres ruchu tłumionego wynosi  $T = 2$  s.
12. **Struna gitary.** Struna A gitary drga z częstotliwością 110 Hz; po szarpnięciu jej amplituda maleje  $e$ -krotnie w ciągu 3 s. Wyznacz współczynnik tłumienia  $\beta$ , liczbę drgań w tym czasie i dobroć oscylatora  $Q = \omega_0/(2\beta)$ . Jak szeroka (w Hz) jest krzywa rezonansowa takiej struny? Dlaczego struna „łapie” rezonans od drugiej struny nastrojonej na 110 Hz, a nie od nastrojonej na 115 Hz?

### *Oscylator wymuszony i rezonans*

- 13. Samochód na progach.** Samochód o masie 1200 kg stoi na czterech jednakowych sprężynach; pod jego ciężarem każda ugina się o 5 cm. Oblicz współczynnik sprężystości jednej sprężyny i częstotliwość drgań pionowych nadwozia. Na osiedlu progi zwalniające ustawiono co 12 m. Przy jakiej prędkości samochód będzie „bujać” najmocniej? Po co w samochodzie są amortyzatory, skoro sprężyny już są?
- 14.** Wyprowadź wzór na częstotliwość rezonansową i amplitudę rezonansową oscylatora harmonicznego wymuszonego z tłumieniem.

## XI. Grawitacja

### *Prawo powszechnego ciążenia*

1. Wyznaczyć przyspieszenie ziemskie na wysokości  $h = 200$  km nad powierzchnią Ziemi, przyjmując przyspieszenie na powierzchni równe  $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Promień Ziemi  $R_Z = 6370$  km.
2. Średnica planetoidy równa jest  $d = 5$  km. Zakładając, że gęstość materii planetoidy wynosi  $\rho = 5,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , znaleźć przyspieszenie grawitacyjne  $g_p$  na jej powierzchni i obliczyć, na jaką wysokość podskoczył człowiek znajdujący się na jej powierzchni, jeżeli w wykonanie skoku włożył tyle samo wysiłku, ile potrzeba, aby podskoczyć na wysokość  $0,5$  m na powierzchni Ziemi.
3. **Jak spada Księżyc.** Księżyc okrąża Ziemię w  $27,3$  doby po orbicie o promieniu  $384\,000$  km. Oblicz jego przyspieszenie dośrodkowe. Porównaj je z  $g$  na powierzchni Ziemi: ile razy jest mniejsze? Odległość Księżyca to ok.  $60$  promieni Ziemi – jaki wniosek o zależności siły grawitacji od odległości wyciągnął z tego porównania Newton? O ile metrów Księżyc „spada” ku Ziemi w ciągu sekundy?
4. Na linii prostej łączącej Ziemię i Księżyc znaleźć punkt o tej własności, że znajdujące się w nim ciało jest przyciągane przez Księżyc i Ziemię z tą samą siłą. Odległość między Ziemią i Księżycem przyjąć za równą  $60$  ziemskim promieniom, a masa Księżyca jest  $81$  razy mniejsza od masy Ziemi.
5. Wyznaczyć stosunek ciężarów ciała na równiku i biegunie planety, której promień jest równy  $R$ , masa  $M$ , a doba wynosi  $T$ . Dla jakiej długości doby ciało na równiku stałoby się nieważkie? Porównaj z okresem satelity tuż nad powierzchnią.
6. **Skąd się biorą pływy?** Oblicz różnicę przyspieszeń grawitacyjnych wywołanych przez Księżyc w środku Ziemi i w punkcie na jej powierzchni najbliższym Księżycowi (masa Księżyca  $7,3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ , odległość  $384\,000$  km,  $R_Z = 6370$  km). Pokaż, że dla  $R_Z \ll d$  różnica ta wynosi w przybliżeniu  $2GM R_Z/d^3$ . Oblicz analogiczną wielkość dla Słońca ( $M = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ ,  $d = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$ ). Dlaczego Słońce, choć przyciąga Ziemię  $180$  razy silniej niż Księżyc, wywołuje pływy dwa razy słabsze? Dlaczego są dwa przypływy na dobę, a nie jeden?

### *Satelity i orbity*

7. Jaką prędkość poziomą względem powierzchni Ziemi należy nadać rakiecie lecącej w niewielkiej odległości od tej powierzchni wzdłuż równika, aby po wyłączeniu silników rakiet, nie spadając na Ziemię, zaczęła poruszać się po orbicie kołowej dookoła Ziemi (tzn. stała się jej sztucznym satelitą)? Nie uwzględniać oporu atmosfery. Czy ma znaczenie, w którą stronę wzdłuż równika leci rakiet?
8. Maksymalna wysokość pierwszego sputnika Ziemi wynosiła  $947$  km. Jaką prędkość liniową musiał mieć wtedy sputnik, jeśli dalszy jego ruch odbywał się po orbicie kołowej? Promień Ziemi  $R_Z = 6370$  km.
9. Wyznaczyć liczbę obrotów satelity dookoła Ziemi w ciągu doby, jeśli porusza się on po orbicie kołowej o promieniu  $R = 7340$  km.
10. Wyznaczyć odległość od środka Ziemi do sztucznego satelity oraz wyznaczyć jego prędkość liniową, jeżeli satelita ten porusza się w płaszczyźnie równika w kierunku obrotu Ziemi z taką prędkością, że jest on nieruchomy względem Ziemi. Promień Ziemi  $R_Z = 6370$  km.
11. **Ważenie Jowisza.** Księżyc Io okrąża Jowisza w  $1,77$  doby po orbicie o promieniu  $422\,000$  km. Wyznacz masę Jowisza i porównaj z masą Ziemi ( $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ). Tą samą metodą „zważ” Słońce, znając okres i promień orbity Ziemi. Dlaczego nie da się w ten sposób zważyć planety, która nie ma księżyców?

- 12. Czy da się wyskoczyć z Deimosa?** Oblicz prędkość ucieczki  $v_u = \sqrt{2GM/R}$  dla Ziemi, Księżyca ( $M = 7,3 \cdot 10^{22}$  kg,  $R = 1740$  km) i księżyc Marsa Deimosa (traktuj go jako kulę o promieniu 6 km i gęstości  $1,5$  g/cm<sup>3</sup>). Człowiek na Ziemi podskakuje z prędkością ok. 3 m/s. Z którego z tych ciał mógłby wyskoczyć na zawsze? A rowerem?
- 13. Ziemia jako czarna dziura.** Do jakiego promienia trzeba by ścisnąć Ziemię (a do jakiego Słońce,  $M = 2 \cdot 10^{30}$  kg), żeby prędkość ucieczki z jej powierzchni równa była prędkości światła? Wyprowadź wzór  $R = 2GM/c^2$ . Rachunek newtonowski daje tu – przypadkiem – dokładnie wynik ogólnej teorii względności (promień Schwarzschilda). Jaka byłaby gęstość takiej „Ziemi”?

## XII. Elementy termodynamiki

### *Gaz doskonały*

1. W stalowej butli znajduje się 10 g gazu (idealnego) pod ciśnieniem 100 atm. Jaką masę gazu pobrano izotermicznie z butli, jeżeli jego ciśnienie zmalało czterokrotnie?
2. **Opona zimą.** Latem, przy  $25^{\circ}\text{C}$ , kierowca napompował opony do nadciśnienia 2,4 bar (ciśnienie atmosferyczne 1,0 bar). Jakie nadciśnienie pokaże manometr w mroźny poranek przy  $-15^{\circ}\text{C}$  (objętość opony bez zmian)? Dlaczego kontrolka ciśnienia zapala się właśnie przy pierwszych mrozach? Ile procent powietrza trzeba dopompować, żeby wrócić do 2,4 bar?
3. Pęcherzyk metanu, wypływając z dna jeziora na powierzchnię, zwiększa swoją objętość trzykrotnie. Temperatura wody na dnie jeziora wynosi  $t_1 = 7^{\circ}\text{C}$ , a na powierzchni  $t_2 = 17^{\circ}\text{C}$ . Oblicz głębokość jeziora. Założyć, że metan można potraktować jako gaz doskonały. Ciśnienie atmosferyczne na powierzchni jeziora wynosi  $p_0 = 1,13 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ , gęstość wody  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ . *Wskazówka:* ciśnienie słupa wody wynosi  $\rho gh$ . Dlaczego? [Odp.: ok. 20 m]
4. Oblicz gęstość mieszaniny helu o masie  $m_{\text{He}} = 8 \text{ g}$  i argonu o masie  $m_{\text{Ar}} = 4 \text{ g}$ , znajdujące się w temperaturze 300 K pod ciśnieniem  $10^5 \text{ Pa}$ . Masa atomowa He wynosi 4 g/mol, a Ar odpowiednio 40 g/mol. Ile razy mieszanina ta jest lżejsza od powietrza? Gęstość powietrza wynosi około  $1,2 \text{ kg/m}^3$ .
5. W naczyniu o objętości  $V_1$  znajduje się argon pod ciśnieniem  $p_1$  w temperaturze  $T$ , a w drugim naczyniu o objętości  $V_2$  neon pod ciśnieniem  $p_2$  i w takiej samej temperaturze. Jakie będzie ciśnienie mieszaniny tych gazów (traktowanych jako idealne) po połączeniu naczyń (pomijamy objętość połączenia) i izotermicznym wymieszaniu się tych gazów?
6. **Ile cząsteczek w jednym oddechu?** Oblicz liczbę cząsteczek w 0,5 l powietrza w warunkach normalnych ( $p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ,  $T = 273 \text{ K}$ ). Ile cząsteczek mieści się w  $1 \text{ cm}^3$ ? Jaka jest średnia odległość między sąsiednimi cząsteczkami i jak ma się ona do rozmiaru cząsteczki (ok. 0,3 nm)? Wróć do zadania o ostatnim oddechu Cezara i sprawdź swoje wcześniejsze oszacowanie.
7. **Dlaczego Ziemia ma atmosferę, a Księżyc nie?** Oblicz prędkość średnią kwadratową  $v_{\text{rms}} = \sqrt{3kT/m}$  cząsteczek azotu i wodoru w temperaturze 300 K i porównaj z prędkością dźwięku (340 m/s) oraz z prędkością ucieczki z Ziemi (11,2 km/s) i z Księżyca (2,4 km/s). Żadna z nich nie przekracza prędkości ucieczki – dlaczego mimo to Ziemia w skali miliardów lat straciła wodór, a Księżyc całą atmosferę? *Wskazówka:* rozkład Maxwella ma ogon.

### *Pierwsza zasada termodynamiki*

8. Jeden mol azotu schłodzono pod stałym ciśnieniem  $p$  tak, że zmniejszył on swoją objętość od  $V_1$  do  $V_2$ . Jaką ilość ciepła oddał azot?
9. W zamkniętym naczyniu znajduje się  $n_1$  moli azotu i  $n_2$  moli tlenu (traktowanych jako gaz doskonały). Oblicz zmianę energii wewnętrznej tej mieszaniny spowodowaną jej ochłodzeniem od temperatury  $T_1$  do temperatury  $T_2$ .
10. W cylindrycznym naczyniu o objętości  $V$  pod tłokiem (poruszającym się bez tarcia) znajduje się gaz idealny pod ciśnieniem  $p$  w temperaturze  $T_1$ . Oblicz pracę wykonaną przez gaz w czasie izobarycznego rozprężania wskutek ogrzania gazu do temperatury  $T_2$ . Masa tłoka wynosi  $m$ , a jego powierzchnia  $S$ . Ciśnienie atmosferyczne wynosi  $p_0$ .
11. Gaz idealny o parametrach stanu  $p_1, V_1, T_1$  przeprowadzamy za pomocą ogrzewania izobarycznego i izochorycznego do stanu o parametrach  $p_2, V_2, T_2$ . Czy kolejność tych przemian ma wpływ na ilość dostarczonej do układu energii cieplnej? Narysuj obie drogi na wykresie  $p$ – $V$ .

- 12. Gorąca pompka.** W pompce rowerowej powietrze ( $\gamma = 1,4$ ) sprężamy szybko (adiabatycznie) od 1 bar i  $20^\circ\text{C}$  do 8 bar. Korzystając z równania  $TV^{\gamma-1} = \text{const}$  (lub  $T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const}$ ), oblicz temperaturę końcową i stopień sprężenia  $V_1/V_2$ . Dlaczego pompka się grzeje, skoro nic jej nie ogrzewa? Do jakiej temperatury sprężane jest powietrze w silniku Diesla przy stopniu sprężenia 20 i dlaczego taki silnik nie potrzebuje świec zapłonowych?

*Druga zasada termodynamiki*

- 13. Ile ciepła idzie do rzeki.** Para w elektrowni ma temperaturę  $550^\circ\text{C}$ , a woda chłodząca  $30^\circ\text{C}$ . Oblicz sprawność Carnota. Rzeczywista sprawność bloku wynosi 40%; ile ciepła na sekundę oddaje do rzeki blok o mocy elektrycznej 1 GW i o ile stopni ogrzeje rzekę o przepływie  $100 \text{ m}^3/\text{s}$  ( $c_w = 4,2 \text{ kJ}/(\text{kg K})$ )? Dlaczego nie da się zbudować elektrowni, która zamienia całe ciepło na prąd?
- 14. Entropia kostki lodu.** Kostka lodu o masie 20 g i temperaturze  $0^\circ\text{C}$  topi się w pokoju o temperaturze  $25^\circ\text{C}$  (ciepło topnienia  $334 \text{ kJ/kg}$ ). Oblicz zmianę entropii lodu, zmianę entropii pokoju (traktuj go jako zbiornik o stałej temperaturze) oraz zmianę entropii całości. Który znak ma wynik i co by się stało z całkowitą entropią, gdyby ciepło samorzutnie popłynęło od lodu do pokoju?

### XIII. Elementy szczególnej teorii względności

#### *Postulaty i dodawanie prędkości*

1. Zjonizowany atom, który wyleciał z akceleratora, wyemitował foton w kierunku swojego ruchu. Jaka będzie prędkość tego fotonu względem akceleratora? Rachunki muszą tu potwierdzić fundamentalną cechę światła poruszającego się w próżni. O jaką cechę chodzi?
2. **Dodawanie prędkości.** Statek kosmiczny oddala się od Ziemi z prędkością  $0,6c$  i wystrzeliwuje w kierunku ruchu pocisk z prędkością  $0,6c$  względem siebie. Jaką prędkość pocisku zmierzy obserwator na Ziemi według Galileusza, a jaką według Einsteina ( $u = \frac{u'+v}{1+u'v/c^2}$ )? Co wyjdzie, gdy zamiast pocisku statek wyśle impuls światła? Pokaż, że wzór relatywistyczny nigdy nie daje  $u > c$ , jeśli  $u', v < c$ .

#### *Dylatacja czasu i skrócenie długości*

3. Akcelerator liniowy nadaje elektronom prędkość (względem aparatury) taką, że  $v^2/c^2 = 0,84$ . Kanał akceleratora ma długość 2000 m. Jaką długość kanału „widzą” pędzące elektrony?
4. Długość nieruchomego pociągu jest taka sama jak długość tunelu. Pociąg ten jedzie z prędkością  $v$ . Czy początek i koniec pociągu miną końce tunelu dokładnie w tym samym momencie czasu? Rozważ odpowiedź z punktu widzenia obserwatora w tunelu i pasażera pociągu.
5. Znaleźć czas życia cząstki, jeżeli jej prędkość wynosi  $0,98c$ , a odległość przebyta przez nią do rozpadu to 300 km (zmierzona względem Ziemi).
6. **GPS.** Satelity GPS krążą z prędkością ok. 3,9 km/s. O ile sekund na dobę spóźnia się ich zegar względem zegara na Ziemi z powodu dylatacji czasu (rozwiń  $\gamma$  dla  $v \ll c$ :  $\gamma \approx 1 + v^2/2c^2$ )? Sygnał GPS biegnie z prędkością  $c$  – jakiemu błędowi położenia odpowiadałby ten dryft po jednej dobie bez korekty? (Ogólna teoria względności dodaje do tego efekt grawitacyjny o przeciwnym znaku i większy, ok.  $+45 \mu\text{s}$  na dobę.)
7. **Bliźnięta liczbowo.** Statek leci do gwiazdy odległej o 4 lata świetlne z prędkością  $0,8c$ , zawraca i wraca z tą samą prędkością. Ile czasu minie na Ziemi, a ile na statku? Jaką odległość do gwiazdy mierzy astronauta w locie? Każdy z bliźniaków widzi zegar drugiego jako chodzący wolniej – dlaczego mimo to wynik nie jest symetryczny i który z nich jest młodszy po powrocie?

#### *Masa, pęd i energia*

8. Z jaką prędkością powinna poruszać się cząstka, aby jej masa relatywistyczna (mierzona przez obserwatora w laboratorium) była dwukrotnie większa od jej masy spoczynkowej?
9. Całkowita moc emitowana przez Słońce wynosi  $10^{26}$  W. Z jaką szybkością (w kg/s) ubywa masy Słońca (jest zamieniana na energię)? Moc emitowana przez typowy kwazar wynosi  $10^{41}$  W. Z jaką szybkością ubywa masy kwazara? Ile „Słońc” rocznie?
10.  **$E = mc^2$  w kuchni.** Litry wody ogrzano od  $20^\circ\text{C}$  do wrzenia ( $Q \approx 335$  kJ). O ile wzrosła masa wody? Porównaj wynik z masą bakterii (ok.  $10^{-15}$  kg) i z dokładnością najlepszych wag laboratoryjnych. Ile energii uwolniłoby się, gdyby całą masę ziarenka soli (1 mg) zamienić na energię, i ile domów można by nią ogrzewać przez rok (ok. 20 MWh na dom)?
11. **Proton jak komar.** W akceleratorze LHC protony mają energię 6,5 TeV ( $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  J; energia spoczynkowa protonu 0,938 GeV). Oblicz czynnik  $\gamma$  i wyraż prędkość protonu jako  $c(1-\epsilon)$  – znajdź  $\epsilon$ . Ile brakuje protonowi do prędkości światła w m/s? Porównaj energię jednego protonu z energią kinetyczną lecącego komara (masa 2 mg, prędkość 1 m/s). Skoro pojedynczy proton ma energię komara, dlaczego wiązka LHC ( $3 \cdot 10^{14}$  protonów) potrafi przetopić tonę miedzi?

### *Efekt Dopplera*

- 12.** Długości fal światła zielonego i czerwonego wynoszą odpowiednio 500 nm i 700 nm. Kierowca, który przejechał na czerwonym świetle przez skrzyżowanie, próbuje tłumaczyć się policjantowi, że widział zielone światło dzięki efektowi Dopplera. Z jaką prędkością musiałby poruszać się kierowca, aby zjawisko takie miało miejsce? Jak wysoki mandat musiałby zapłacić, gdyby policjant przyjął jego wyjaśnienia?